***Apellidos y nombre*...**

TEMAS 4, 5 Y 6. CONTROL. VECTORES, PUNTOS, RECTAS, PLANOS Y PROBLEMAS MÉTRICOS

1 . Sean los vectores $\vec{u}(2, 3, 5)$, $\vec{v}(-1, 0, 2)$ y $\vec{w}(3, \lambda, \mu)$:

a) Halla la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, así como el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Calcula el valor de λ y μ para que $\vec{w}$ sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) ¿Para qué valores de λ y μ determinan un tetraedro de volumen 5?

Solución:

a) $$pr\,\vec{u}\,|_{\vec{v}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(2,3,5)(-1,0,2)}{\sqrt{1+0+4}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{8\sqrt{5}}{5}}$$

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{8}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{5}} \cong 0'58\ ;$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0'58 = \boxed{54^{\circ}31'22''}$$

b) $$\vec{u}\cdot\vec{w} = 0\ ;\ (2,3,5)\cdot(3,\lambda,\mu) = 0\ ;\ 6+3\lambda+5\mu = 0$$
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = 0\ ;\ (-1,0,2)(3,\lambda,\mu) = 0\ ;\ -3+2\mu = 0$$

$$\boxed{\mu = \frac{3}{2}}\quad 6+3\lambda+5\cdot\frac{3}{2} = 0\ ;\ 6+3\lambda+\frac{15}{2} = 0$$
$$3\lambda = \frac{-27}{2}\ ;\ \boxed{\lambda = \frac{-27}{6} = \frac{-9}{2}}$$

c) $$V = \frac{1}{6}\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & \lambda & \mu \end{vmatrix}\right| = 5\ ;$$

$$\frac{1}{6}|18-9\lambda+3\mu| = 5\ ;\quad |18-9\lambda+3\mu| = 30$$

$$18-9\lambda+3\mu = 30\ ;\ 6-3\lambda+\mu = 10\ ;\ \boxed{\mu = 4+3\lambda}$$

$$18-9\lambda+3\mu = -30\ ;\ 6-3\lambda+\mu = -10\ ;\ \boxed{\mu = -16+3\lambda}$$

a) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-2+0+10}{\sqrt{1+0+4}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces :

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{8}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{5}} \approx 0{,}58 \quad\to\quad \alpha = 54^{\circ}\,31'\,22''$$

b) Su producto escalar ha de ser cero:

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = (2, 3, 5)\cdot(3, \lambda, 1) = 6+3\lambda+5 = 11+3\lambda = 0 \quad\to\quad \lambda = \frac{-11}{3}$$

Nota.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

Apellidos y nombre...

2. Sean las rectas: $r:\begin{cases} x+y=1 \\ z=2 \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de estas rectas diciendo si tienen algún punto común.
b) Hallar la ecuación de un plano que las contenga.

Solución:

a) $r \cap s$:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\lambda-2\lambda=1 \\ 2+\lambda=2 \end{array}\right\} \quad -\lambda=0;\ \lambda=0 \quad \lambda=0 \ \Big|\ \boxed{\lambda=0}$$

$P(1,0,2)$. Son secantes $r \cap s = \boxed{P(1,0,2)}$

b) $P(1,0,2)$

$$\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,-1,0)$$

$$\vec{v}=(1,-2,1)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$-(x-1)-y-(z-2)=0$$

$$-x-y-z+3=0;\ \boxed{x+y+z-3=0}$$

- Veamos que r y s se cortan en un punto. Para ello, sustituimos las ecuaciones de s en las de r:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\lambda-2\lambda=1 \ \rightarrow\ \lambda=0 \\ 2+\lambda=2 \ \rightarrow\ \lambda=0 \end{array}\right\} \text{Se cortan en el punto } (1,0,2).$$

- Un vector de dirección de r es:

$\vec{d}_r=(1,1,0)\times(0,0,1)=(1,-1,0)$

- Un vector dirección de s es:

$\vec{d}_s=(1,-2,1)$

- Un vector normal al plano buscado es:

$\vec{d}_r\times\vec{d}_s=(1,-1,0)\times(1,-2,1)=(-1,-1,-1)\ //\ (1,1,1)$

- Por tanto, el plano que contiene a r y a s es:

$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)+1\cdot(z-2)=0$, es decir:

$x+y+z-3=0$

Nota.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

Apellidos y nombre...

3. Sean los puntos: A(0, 4, 1), B(2, 0, 1) , C (1, 4, 0). Se pide:

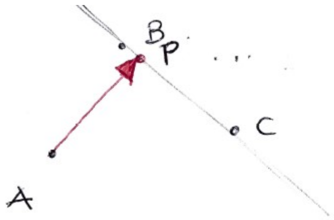
a) Ecuación de la recta que pasando por A corta perpendicularmente a la recta que pasa por B y C.

b) Volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C.

c) Distancia desde el origen de coordenadas al plano ABC.

d) Punto del plano ABC cuya distancia al origen de coordenadas sea mínima.

a)



$r: \overline{BC}$; $B(2,0,1)$

$\vec{u} = \vec{BC} = (1,4,0)-(2,0,1) = (-1,4,-1)$

$r: P(2-\lambda, 4\lambda, 1-\lambda)$

$\vec{AP} \perp \vec{u}$

$\vec{AP} = (2-\lambda, 4\lambda, 1-\lambda) - (0,4,1) = (2-\lambda, 4\lambda-4, -\lambda)$

$\vec{AP} \perp \vec{u}$; $(2-\lambda, 4\lambda-4, -\lambda)(-1,4,-1) = 0$

$\lambda - 2 + 16\lambda - 16 + \lambda = 0$; $18\lambda - 18 = 0$

$\boxed{\lambda = 1}$; $\vec{v} = \vec{AP} = (1,0,-1)$

$r: A(0,4,1)$ $\vec{v}(1,0,-1)$ $\boxed{r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 \\ z = 1-\lambda \end{cases}}$

b) $V = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|12| = \boxed{2}$

c) $\pi: ABC$; $A(0,4,1)$

$\vec{u} = \vec{AB} = (2,0,1)-(0,4,1) = (2,-4,0)$

$\vec{v} = \vec{AC} = (1,4,0)-(0,4,1) = (1,0,-1)$

Nota.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

Apellidos y nombre..

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-4 & z-1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 ; \quad 4x + 4(z-1) + 2(y-4) = 0$$

$$4x + 2y + 4z - 12 = 0$$

$$\boxed{2x + y + 2z - 6 = 0}$$

$$d(0,\pi) = \frac{|2.0 + 0 + 2.0 - 6|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

d) $\pi: 2x + y + 2z - 6 = 0$

$r: 0 ; \ r \perp \pi$ $\quad\Big|\ r: (2\lambda, \lambda, 2\lambda)$

$\vec{u} = \vec{n}(2,1,2)$

$2 \cdot 2\lambda + \lambda + 2.2\lambda - 6 = 0 ; \ 9\lambda - 6 = 0 ; \ \lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$$\boxed{P\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)}$$

Nota.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

Apellidos y nombre...

4. Estudia, según los distintos valores de a, las posiciones relativas del plano y la recta siguientes:

$$\pi : x + ay - z = 1; \; r : \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} r: \\ \\ \pi: \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \\ 1 & a & -1 & 1 \end{array} \right)$$

M

M'

$$Rg\, M: \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2 - 1 - a^2 - a + 2a + 1 = 0$$

$$-a^2 + a + 2 = 0 \begin{cases} \boxed{a = 2} \\ \boxed{a = -1} \end{cases}$$

$\boxed{a = 2}$;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right); \quad Rg\, M = 2$$

$$Rg\, M': \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 4 + 2 - 4 - 1 = 0$$

$Rg\, M = Rg\, M' = 2$

Sist. C.I. $r \subset \pi$. $\boxed{\text{Contenida.}}$

$\boxed{a = -1}$;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad Rg\, M = 2$$

$$Rg\, M': \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 2 + 2 - 4 - 1 \neq 0$$

$Rg\, M = 2$
$Rg\, M' = 3$ | Sist. I.
Luego $r \parallel \pi$. $\boxed{\text{Paralela}}$

$\boxed{a \neq 2 \text{ y } a \neq -1}$ Sist. C.D. $r \cap \pi = P$

$\boxed{\text{Secante}}$

Nota.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

Apellidos y nombre...

5. Determina la posición relativa de las rectas r y s, y calcula la mínima distancia entre ellas:

$$r:\begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 3 \\ z = -1+6\lambda \end{cases} \qquad s: \frac{x-6}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+1}{3}$$

a) $r: A(2,3,-1)\ ;\ \vec{v}(2,0,6)$

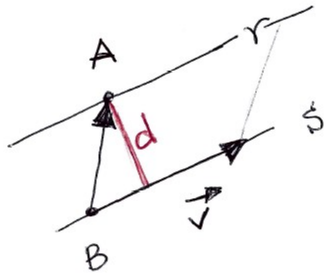
$s: B(6,-2,-1)\ ;\ \vec{u}(1,0,3)$

$\vec{u}, \vec{v}: \quad \frac{2}{1} = \frac{0}{0} \neq \frac{6}{3}$. Son l.d.

$B(6,-2,-1)\ ;\ \left.\begin{array}{l} 6 = 2+2\lambda \\ \boxed{-2 = 3} \\ -1 = -1+6\lambda \end{array}\right|$ Absurdo | No comparten ese punto luego $\boxed{r // s \text{ PARALELAS}}$

b) $d(r,s) = d(A,s)$

$$\boxed{d = \frac{|\vec{BA} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}}$$



$\vec{BA} = (2,3,-1)-(6,-2,-1) = (-4,5,0)$

$\vec{v} = (2,0,6)$

$$\vec{BA} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (30, +24, +10)$$

$|(30,24,+10)| = \sqrt{30^2+24^2+(+10)^2} = \sqrt{1576} =$

$|\vec{v}| = \sqrt{2^2+0^2+6^2} = \sqrt{40}$ | $d = \frac{\sqrt{1576}}{\sqrt{40}} \simeq 6'28$

Nota.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.